czooosnek.cloud

Funkcja liniowa

W trosce o Twoją maturę, pozdrawiam serdecznie.

Zanim cokolwiek to…

Co to w ogóle jest funkcja?

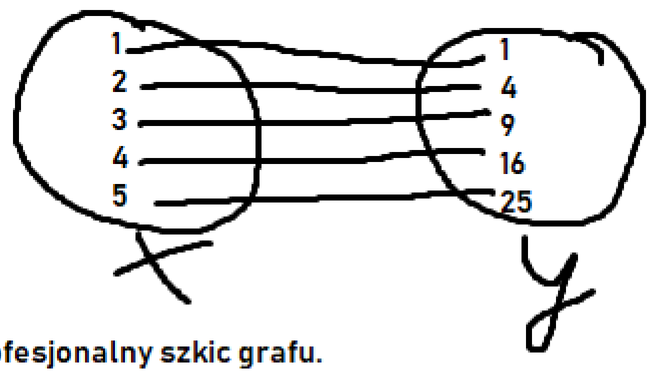
Funkcja jest to przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi ze zbioru **x**, jest przyporządkowany dokładnie jeden element **y**.

x nazywamy inaczej argumentem
y to po prostu wartość funkcji

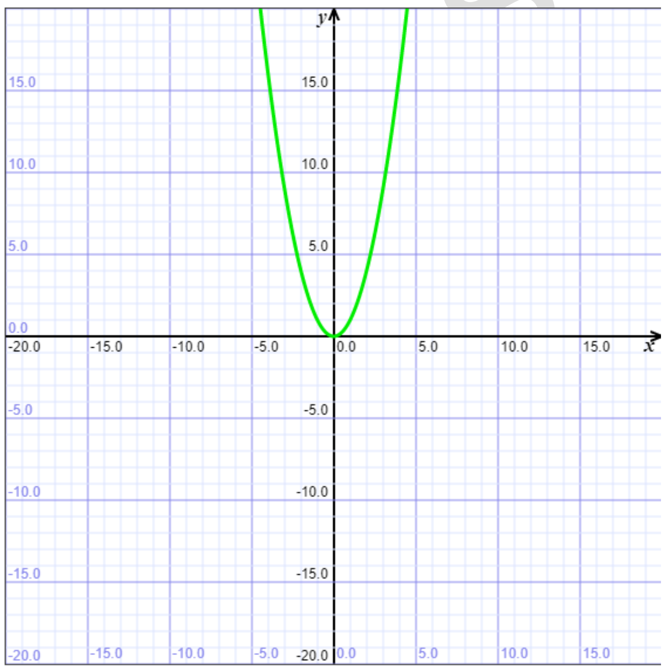
Jakie są sposoby opisu funkcji?

Funkcję można opisać za pomocą: **tabeli**, **grafu**, **wykresu**, a także **wzoru**.

x	1	2	3	4	5
f(x)	1	4	9	16	25



Profesjonalny szkic grafu.

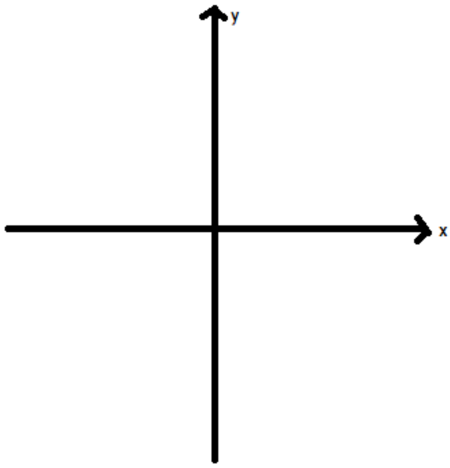


y = x^2

Jak naszkicować wykres?

Teraz w poradniku step-by-step, pokażę wszystkim niezapoznanym, jak naszkicować wykres funkcji.

Po pierwsze, zaczynamy od narysowania dwóch osi – x oraz y.



Super, mamy już dwie osie.
Teraz **K O N I E C Z N I E** trzeba wyznaczyć skalę.
No więc, wyznaczamy ją.

Pięknie.

Załóżmy, że nasza funkcja jest ma wzór **f(x)=2x**.
Aby ją zaznaczyć na wykresie, musimy skorzystać z tabelki, albo podstawić pod wzór losowe wartości y, by uzyskać wartości x – wtedy już będziemy mogli zaznaczyć wszystko na wykresie.

Wybierzmy teraz drugą metodę.

Zamiast f(x), będę podstawiać losowe liczby.

$$2 = 2x| : 2$$

$$x = 1$$

Nasz pierwszy punkt ma współrzędne:

$$A = (1, 2)$$

(A = (x,y), f(x) to w tym przypadku po prostu y, pamiętajcie)

Policzmy współrzędne drugiego, dowolnego punktu. Ja tym razem podstawię -2 zamiast f(x).

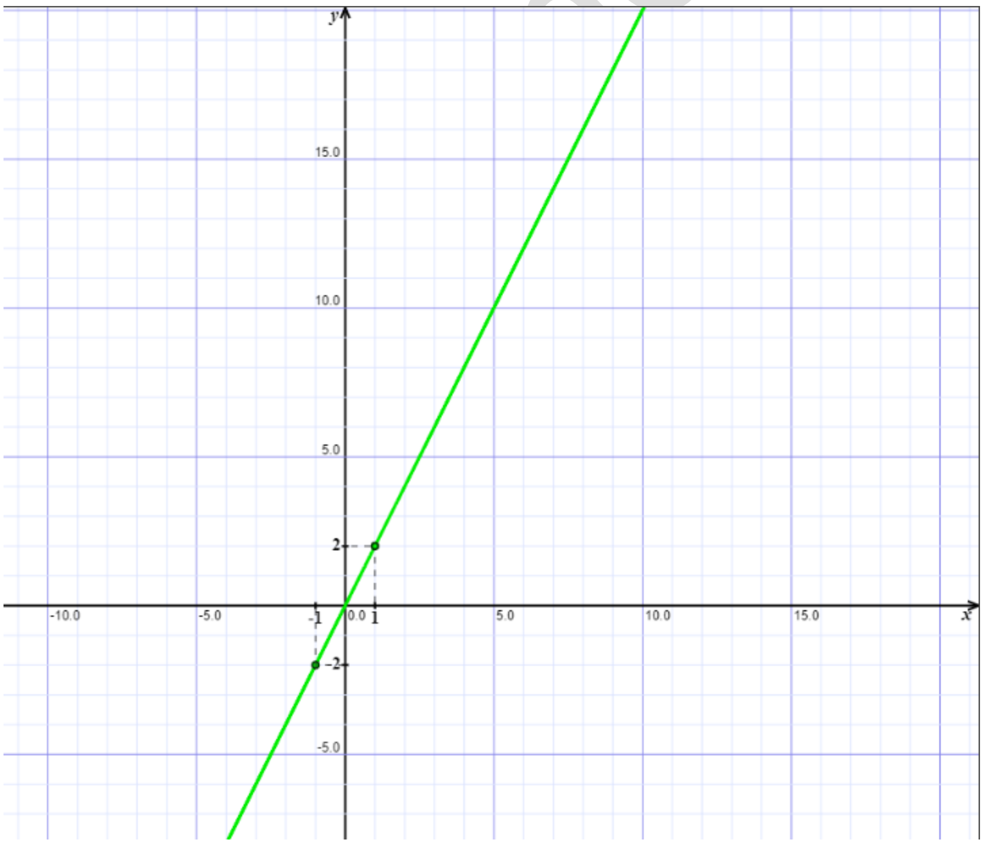
$$-2 = 2x| : 2$$

$$x = -1$$

Drugi punkt ma współrzędne:

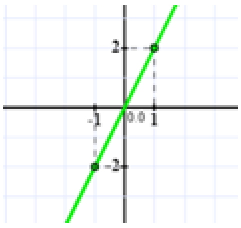
$$B = (-1, -2)$$

Teraz, aby narysować wykres tej funkcji, wystarczy że zaznaczycie sobie te dwa punkty na przygotowanym wcześniej miejscu pracy.



Na koniec po prostu przeciągnij prostą przez te dwa punkty. No, tylko trochę lepiej niż ja na tablicy.

Proszę zapamiętać, że wzór funkcji liniowej to y = ax+b, gdzie:
: **y** to wartość, którą przyjmuje funkcja liniowa
: **a** to współczynnik kierunkowy, jego znaczenie wyjaśnię na dalszym etapie
: **x** to po prostu argument
: **b** to punkt przecięcia wykresu funkcji z osią Y, narysowany przez nas wcześniej wykres przyjmował wartość **b = 0**, możecie to zaobserwować tutaj:



Ćwiczenie 4, strona 110

a) Narysuj wykres funkcji f(x) = ax+b, jeśli: **a = 0, b = 1**

Dobra, jeśli otrzymacie takie zadanie do rozwiązania, warto zacząć od wyznaczenia wzoru tej funkcji. Wszystkie wartości macie już podane jak na tacy w treści zadania.

W naszym przypadku wzór będzie wyglądał następująco:

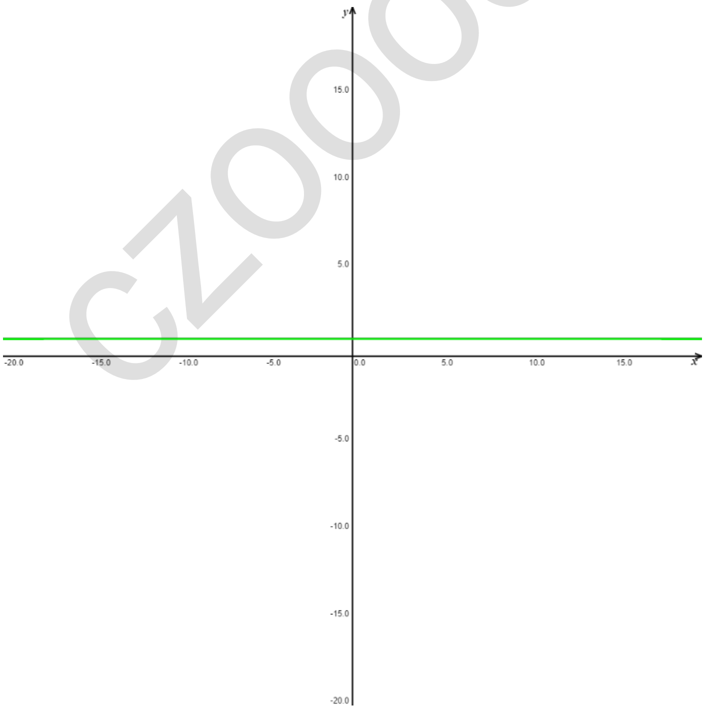
$$y = 0x + 1$$

Zero razy x da nam zero, także po prostu wyrzucamy tą część równania.

$$y = 1$$

No więc, funkcja przyjmuje stałą wartość wynoszącą **1**.

Jak będzie wyglądał wykres funkcji? Będzie wyglądać w ten sposób:



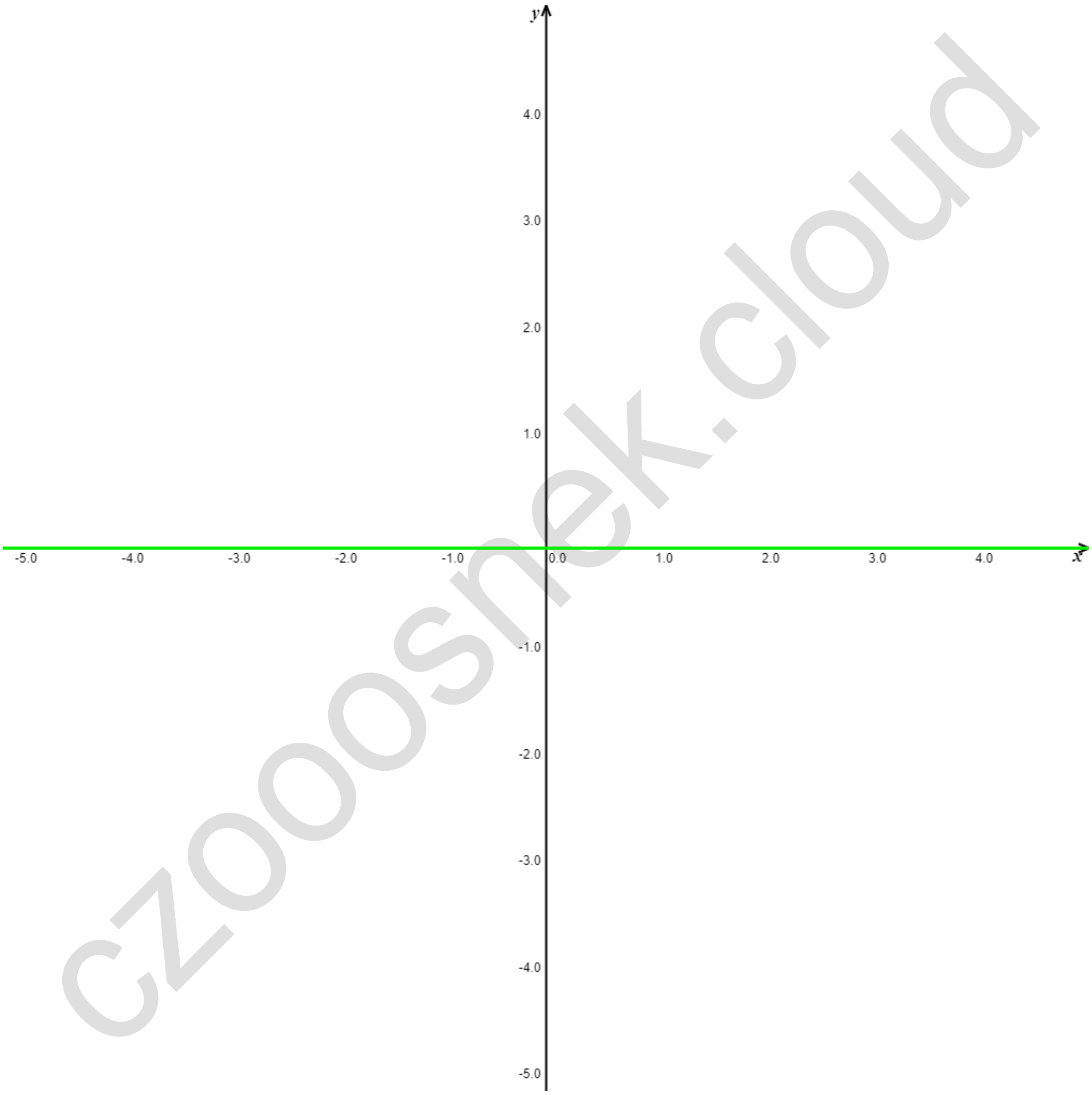
b) Narysuj wykres funkcji f(x) = ax+b, jeśli: **a = 0, b = 0**

W tym przypadku sprawa jest jeszcze prostsza. Zadanie wykonujemy w analogiczny sposób jak wcześniej, z tym, że tym razem wzór będzie wyglądać tak:

$$y = 0$$

Skoro **funkcja przyjmuje stałą wartość 0**, to będzie to ponownie prosta pokrywająca się z osią x.

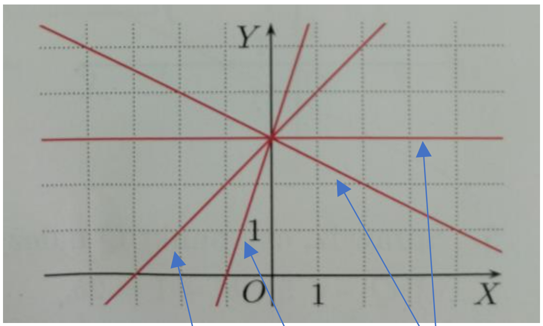
Tak wygląda poprawnie narysowany wykres tej funkcji:



Zadanie zostało wykonane.

Ćwiczenie 5, strona 111

Wszystkie proste na rysunku przechodzą przez punkt (0,3). Który punkt odpowiada której prostej? (po prostu każda funkcja przyjmuje **b = 3**)



Mamy podane wzory:

$$y = x + 3$$

$$y = 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$y = 3x + 3$$

To zadanie jest bardzo proste do wykonania. Wystarczy popatrzeć na wartość stojącą przed argumentem funkcji, czyli na współczynnik kierunkowy (**a**).

W przypadku **pierwszego** wzoru:

$$y = x + 3$$

Będzie to wykres wschodzący dość łagodnie w górę. Współczynnik kierunkowy wynosi 1, niby przed argumentem nie stoi nic, ale to chyba logiczne, że:

$$1 * x = x$$

No więc, wykres tej funkcji to:

Teraz zajmiemy się drugą funkcją, czyli:

$$y = 3$$

Oczywiście będzie to funkcja stała. Dlaczego? Otóż ma zerową wartość **a** (wiemy to dlatego, że w tym wzorze nie ma **x**'a). Wykres tej funkcji to:

Trzeci wzór:

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Tutaj prosta sprawa, współczynnik kierunkowy jest ujemny, więc funkcja będzie malejąca.

Natomiast ta funkcja:

$$y = 3x + 3$$

Ma najwyższy współczynnik kierunkowy **(3)**, więc będzie szła ostro w górę.

Kiedy dwa wykresy funkcji będą równoległe?

Będą one równoległe, kiedy współczynniki kierunkowe obu funkcji będą równoległe.

Dla przykładu, te dwie proste będą równoległe:

$y = 3x + 2$

$y = 3x - 1$

Jak widzicie, patrzymy tylko i wyłącznie na współczynnik kierunkowy, **b** nie ma żadnego wpływu na to, czy te proste będą równoległe.

Na przykład, te proste nie będą równoległe, gdyż współczynniki kierunkowe tych funkcji są różne:

$y = 3x + 2$

$y = 2x + 2$

Monotoniczność funkcji

We wcześniejszych zadaniach już o tym wspominałem, ale tutaj macie to pięknie rozpisane.

Najważniejsza zasada:

- Gdy **a** jest większe od 0, funkcja jest **rosnąca**

Na przykład:

$y = 2x + 2$

- Gdy **a** jest równe 0, funkcja jest **stała**

Na przykład:

$y = 2$

- Gdy **a** jest mniejsze od 0, funkcja jest **malejąca**

Na przykład:

$y = -3x + 4$

Zadanie 5, strona 115

Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m.

$f(x) = (5 - m)x$

W tym przykładzie interesuje nas tylko i wyłącznie część (5-m), czyli ta, która stoi przed znakiem x.

Podstawiamy ją do zera.

$5 - m = 0$

$5 - m = 0| + m$

$m = 5$

Dobra, ale co to właściwie oznacza?
Wiecie już, że funkcja jest stała dla wartości a = 0.
W powyższym przykładzie **a** wynosi po prostu 5-m, dlatego właśnie 5-m podstawiłem do równania z zerem.
Musimy się po prostu dowiedzieć, dla jakiego **m**, funkcja będzie stała. No i dowiedzieliśmy się, funkcja będzie stała, gdy wartość m będzie wynosić:

$$m = 5$$

Zadanie jest prawie rozwiązane. Teraz wystarczy to odpowiednio zapisać.

Funkcja jest rosnąca, gdy:
$m < 5$

Na przykład:

$$y = (5 - (-2))x$$

Funkcja jest stała, gdy:
$m = 5$

Na przykład:

$$y = (5 - 5)x$$

Funkcja jest malejąca, gdy:
$m > 5$

Na przykład:

$$y = (5 - 7)x$$

Zadanie zostało rozwiązane.

Wyznaczanie wzoru na podstawie punktów

Zadanie 3, strona 112

Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt P i przecina oś OY w punkcie (0,4). Wyznacz wzór tej funkcji i naszkicuj jej wykres.

Dobra, zacznijmy więc od tego, że skoro funkcja ma przecinać oś OY w punkcie (0,4), to **b** wynosi 4.

a) P wynosi (2,6)

Podstawiamy więc dane do wzoru:

$$y = ax + b$$

Po podstawieniu:

$$6 = 2a + 4$$

Rozwiązujemy równanie.

$$6 = 2a + 4 | -4$$

$$2 = 2a$$

$a = 1$

I to prawie wszystko.
Znamy już a i b:

$a = 1$

$b = 4$

Więc podstawiamy to do znanego nam już wzoru funkcji liniowej:

$y = 1x + 4$

Jedynkę umieściłem tu obrazowo, ale przypominam, że nie musimy jej pisać, gdyż:

$1 * x = x$

Czyli nasz wzór to:

$y = x + 4$

Zadanie rozwiązane.

Wyznaczanie wzoru na podstawie dwóch punktów, zakładając, że nie macie podanego b.

Dobra, teraz załóżmy że macie tylko dwa punkty wykresu. Niech będą to A i B.

Oto wymyślone przeze mnie losowe punkty:

$A = (3, 1)$

$B = (2, 2)$

Teraz również podstawiamy je do wzoru ogólnego:

$$\begin{cases} 1 = 3a + b \\ 2 = 2a + b \end{cases}$$

I teraz odejmujemy drugie równanie od pierwszego:

$1 - 2 = -1$

$3a - 2a = a$

$b - b = 0$

Po odjęciu wygląda to następująco:

$$\begin{cases} -1 = a \end{cases}$$

Czyli możemy odczytać, że:

$a = -1$

Co teraz? Otóż musisz znowu wziąć standardowy wzór funkcji liniowej:

$$y = ax + b$$

I podstawić wybrany punkt (dowolny z wymienionych wyżej dwóch), oraz **a**.

$$2 = 2 * -1 + b$$

(podstawiłem punkt B oraz współczynnik kierunkowy równy -1)

$$2 = -2 + b| + 2$$

$$b = 4$$

No i to tyle, **b** jest równe 4.

Aby wyznaczyć wzór tej funkcji, po prostu podstaw **a** i **b** do wzoru ogólnego:

$$y = -1 * x + 4$$

$$y = -x + 4$$

Zadanie zostało rozwiązane, otrzymaliśmy wymagany wzór.

Co zrobić, gdy w podanym w zadaniu wzorze, x oraz y stoją po tej samej stronie?

Na przykład:

$$\frac{1}{3}x - y + 2 = 0$$

To wydaje się proste i logiczne, ale chyba warto o tym wspomnieć.

W wyżej podanym przykładzie wystarczy dodać obustronnie y:

$$\frac{1}{3}x - y + 2 = 0| + y$$

$$\frac{1}{3}x + 2 = y$$

To tyle, wzór jest gotowy.

Zadanie 5, strona 118

Dla jakiej wartości parametru m prosta o podanym równaniu jest równoległa do prostej 4x+3y+7=0?

Po pierwsze robimy to, co wcześniej, czyli wyprowadzamy y na drugą stronę równania.

$$4x + 3y + 7 = 0| - 4x - 7$$

$$3y = -4x - 7$$

Teraz dzielę wszystko przez 3, tak, by został tylko jeden y.

$$3y = -4x - 7| : 3$$

Otrzymuję:

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$$

Mamy już gotowe równanie.

a) $mx + 6y - 1 = 0$

Teraz to podane w przykładzie także musimy potraktować w podobny sposób…

$$mx + 6y - 1 = 0| - mx + 1$$

$$6y = -mx + 1$$

Dzielimy przez 6, by nie było wielokrotnych **y**:

$$6y = -mx + 1| : 6$$

$$y = \frac{1}{6}(-mx) + \frac{1}{6}$$

Dobra, więc mamy dwa równania, i musimy znaleźć takie **m** dla drugiej funkcji, by obie były równoległe:

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$$

$$y = \frac{1}{6}(-mx) + \frac{1}{6}$$

Współczynnik kierunkowy w pierwszym równaniu wynosi:

$$a_1 = -\frac{4}{3}$$

Więc wartość **m** w drugiej funkcji musi być sześć razy większa, dlatego, że **m** mnożone razy 1/6.

$$-\frac{4}{3} * \frac{6}{1} = -\frac{24}{3} = -8$$

Wyszło nam -8, jednak my użyjemy ósemki bez minusa, ze względu na to, że przed **m** stoi już znak wskazujący na ujemną wartość parametru **m.**

Tak więc:

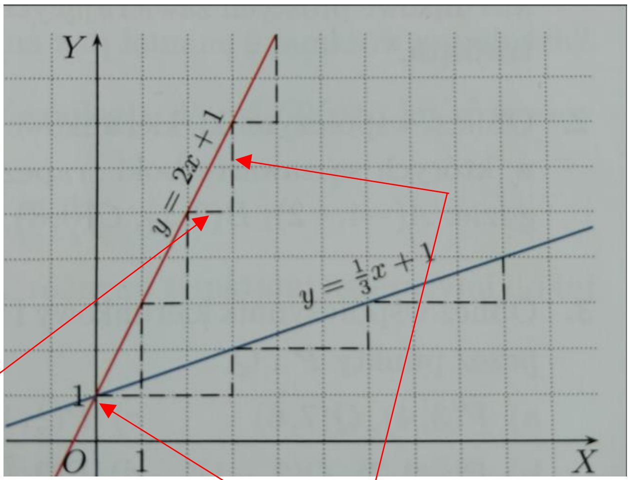
$$m = 8$$

Odpowiedź to: Prosta jest równoległa do prostej 4x+3y+7=0 dla argumentu m=8.

Zadanie wykonane. I to nawet poprawnie! (sprawdziłem w odpowiedziach specjalnie, pozdrawiam serdecznie!)

Interpretacja współczynnika kierunkowego

Oto wykres dwóch funkcji. Możecie go znaleźć w podręczniku, na stronie 119.



O co z tym w ogóle chodzi?

Otóż zrozumienie tego, w jaki sposób tak naprawdę działa współczynnik kierunkowy (czyli **a**), pomoże Wam w rozwiązaniu dużej ilości zadań z podręcznika, a także w trakcie sprawdzianu.

Wcześniej już pokazywałem jedno zadanie, gdzie znajomość tych zależności była pomocna. (Ćwiczenie 5, strona 111)

Pomoże to Wam także podczas rysowania wykresu funkcji. W rzeczywistości mając **a** i **b** będziecie w stanie narysować wykres funkcji.

Funkcja ukazana wyżej za pomocą czerwonej prostej to:

$$y = 2x + 1$$

Popatrzcie, zaczynamy od punktu **b**, czyli miejsca przecięcia funkcji z osią OY. Jest to (0,1). Gdy punkt został już zaznaczony, wystarczy, że spojrzycie na współczynnik kierunkowy. W tym przypadku:

$$a_1 = 2 = \frac{2}{1}$$

Wiesz już, że funkcja będzie szła dosyć gwałtownie w górę, bo współczynnik kierunkowy ma wysoką wartość. Może Ci to pomóc, gdy zapomnisz, że mianownik odpowiada za przesunięcie na wykresie w **poziomie**, a licznik w **pionie.**

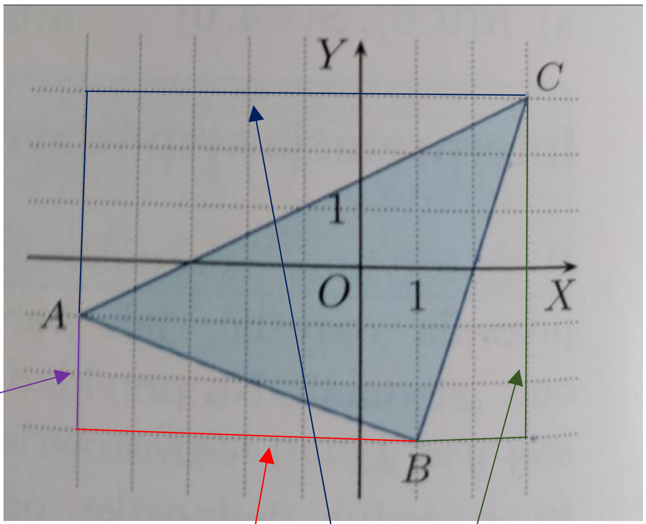
$$a_1 = 2 = \frac{2}{1}$$

Podobnie zadanie rozwiążesz dla funkcji oznaczonej na wykresie kolorem niebieskim.

Jeśli chcesz to poćwiczyć, możesz wykonać zadanie:
Ćwiczenie 3, strona 120.
Po prostu przygotuj sobie zeszyt w kratkę, narysuj układ współrzędnych i wykonaj ćwiczenie według przygotowanego przeze mnie wyżej schematu.

Zadanie 1, strona 120

Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków trójkąta ABC. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych zawierających boki tego trójkąta.



Najpierw odczytamy współrzędne punktów:

$A = (-5, -1)$

$B = (1, -3)$

$C = (3, 3)$

Jeśli uważnie się zapoznałeś przyjacielu z poprzednią stroną, to powinieneś wiedzieć, jak zrobić dalszą część tego zadania.

Przypominam:

$$a = \frac{pion}{poziom}$$

Rozwiązujemy:

$$a_{AB} = \frac{2}{6}$$

Ale przypomnę tylko, jeśli komuś kompletnie wypadło z głowy, że powyższy zapis jest błędny. Po pierwsze, **prosta jest malejąca, a to oznacza, że współczynnik kierunkowy będzie ujemny.** Po drugie liczbę powinniśmy skrócić.

No więc:

$$a_{AB} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Dla pozostałych prostych:

$$a_{BC} = \frac{6}{2} = 3 \qquad a_{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Zadanie wykonane.

Warunek prostopadłości prostych

Mówiliśmy już o równoległych, więc teraz będzie o prostopadłych.

Dwie proste będą prostopadłe, gdy mnożenie ich współczynników kierunkowych zwróci wynik **-1**.

$$a_1 * a_2 = -1$$

Jakieś zadanie

Pierwsza funkcja ma współczynnik kierunkowy 2. Jaki współczynnik kierunkowy musi mieć druga funkcja, by proste były do siebie prostopadłe?

Układamy równanie:

$$2 * a_2 = -1$$

Dzielimy przez 2:

$$2 * a_2 = -1| : 2$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}$$

Współczynnik kierunkowy drugiej funkcji musi wynosić -0,5, by proste były do siebie prostopadłe.

Układy równań liniowych

Ważna sprawa:

- Układ oznaczony – ma jedno rozwiązanie, dwie proste przecinają się tylko w jednym punkcie
- Układ sprzeczny – nie ma rozwiązań – proste są równoległe i nie przecinają się ze sobą w żadnym punkcie
- Układ nieoznaczony – proste pokrywają się ze sobą i mają nieskończenie wiele rozwiązań

Jak rozwiązywać układy równań sposobem **graficznym?**

Zacznij od narysowania układu współrzędnych i według mojego opisu dotyczącego współczynnika kierunkowego narysuj oba wykresy.

Dla przykładu, masz tu taki układ równań:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

Oczywiście musisz przekształcić to tak, by y był sam po jednej stronie.

$$\begin{cases} x + y = -3| - x \\ 3x - 2y = -4| - 3x \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} y = -3 - x \\ -2y = -4 - 3x \end{cases}$$

Musimy jeszcze sprawić, by w drugim równaniu y był jeden i miał wartość dodatnią.

$$\begin{cases} y = -3 - x \\ -2y = -4 - 3x | : (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3 - x \\ y = 2 + \frac{3}{2}x \end{cases}$$

I teraz już chyba wszystko jasne, wystarczy to narysować.

Gotowy rysunek znajdziesz w podręczniku na stronie 132.

Warto zaznaczyć, że w tych równaniach **b** stoi przez znakiem x. Taka przydatna uwaga.

Ćwiczenie 3, strona 133

Rozwiąż algebraicznie układ równań.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Standardowo, musimy uporządkować to świetne równanie.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4| - 3x \\ 3x - y = 5| - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y = 4 - 3x \\ -y = 5 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y = 4 - 3x| : (-2) \\ -y = 5 - 3x| * (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 + \frac{3}{2}x \\ y = -5 + 3x \end{cases}$$

Oba równania są sobie równe. Wykorzystajmy to.

$$-2 + \frac{3}{2}x = -5 + 3x$$

$$-2 + \frac{3}{2}x = -5 + 3x| + 2$$

$$\frac{3}{2}x = -3 + 3x$$

$$-\frac{3}{2}x = -3| : (-3)$$

$$\frac{1}{2}x = 1$$

$$\frac{1}{2}x = 1| * 2$$

$$x = 2$$

Teraz, by uzyskać wartość y, podstawiamy uzyskany x do jednego z początkowych układów (tych po przekształceniu).

Czyli no, do jednego z tych:

$$\begin{cases} y = -2 + \frac{3}{2}x \\ y = -5 + 3x \end{cases}$$

Wybiorę pierwszy.

$$y = -2 + \frac{3}{2} * 2$$

$$y = -2 + 3$$

$$y = 1$$

Odpowiedź: Proste przecinają się w punkcie (2,1).

Miejsce zerowe

Miejsce zerowe to argument dla którego funkcja przyjmuje wartość 0.

Na przykład dla funkcji:

$$y = 2x + 4$$

Miejsce zerowe obliczamy w następujący sposób:

$$0 = 2x + 4$$

$$0 = 2x + 4| - 4$$

$$-4 = 2x$$

$$x = -2$$